第 8 講　合成関数の微分法，逆関数の微分法

PART1 合成関数の微分法

要点整理と公式

要点 ① 合成関数の微分法

関数 $y=(x^2+x+1)^3$ は，2 つの関数 $y=u^3$，$u=x^2+x+1$ の合成関数とみることができる。合成関数について，次の公式が成り立つ。

合成関数の微分法

$y=f(u)$，$u=g(x)$ がともに微分可能であるとき，合成関数 $y=f(g(x))$ は x の関数として微分可能であり

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

（証明）

$u=g(x)$ において，x の増分 Δx に対する u の増分を Δu

$y=f(u)$ において，u の増分 Δu に対する y の増分を Δy とすると

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

ここで，$\Delta u=g(x+\Delta x)-g(x)$ であり，$u=g(x)$ は連続であることから，

$\Delta x\to 0$ のとき　$g(x+\Delta x)\to g(x)$　すなわち　$\Delta u\to$ 　　である。

したがって

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta \quad \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

(ex) $y=(x^2+x+1)^3$ の導関数について

$u=x^2+x+1$ とおくと，$y=u^3$

$$\frac{dy}{d\quad}=3u^2,\quad \frac{d\quad}{dx}=2x+1$$

よって $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{d\quad}\cdot\dfrac{d\quad}{dx}=3u^2\cdot(2x+1)=3(x^2+x+1)^2(2x+1)$

$y=f(u)$, $u=g(x)$ のとき，$\dfrac{dy}{du}=f'(u)$，$\dfrac{du}{dx}=g'(x)$ であることから

合成関数の微分法の公式 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ は

$$\{f(g(x))\}'=f'(u)g'(x)=\qquad\qquad g'(x)$$

と表される。

(ex) $y=(x^2+x+1)^3$ について

$$y'=\qquad\qquad\cdot(x^2+x+1)'=3(x^2+x+1)^2(2x+1)$$

1 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(3x^2-x)^5$ (2) $y=(1-3x^2)^4$ (3) $y=\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

Point Pickup

合成関数の微分法

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \qquad \{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$

第 8 講 PART1 確認問題

次の関数を微分せよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

1 $y=(x^2-3x+4)^4$

$y'=$ ア

① $4(x^2-3x+4)^3$　② $4(x^2-3x+4)^3(2x-3)$

③ $4(x^2-3x+4)^4(2x-3)$　④ $4(x^2-3x+4)^3(x^2-3x)$

2 $y=(7-2x^3)^5$

$y'=$ イ

① $-6x(7-2x^3)^4$　② $-15x^2(7-2x^3)^4$

③ $-30x(7-2x^3)^4$　④ $-30x^2(7-2x^3)^4$

3 $y=\dfrac{1}{(x^2+4)^3}$

$y'=$ ウ

① $-\dfrac{6}{(x^2+4)^4}$　② $-\dfrac{6x}{(x^2+4)^2}$

③ $\dfrac{6x}{(x^2+4)^4}$　④ $-\dfrac{6x}{(x^2+4)^4}$

第 8 講　合成関数の微分法，逆関数の微分法

PART1　合成関数の微分法

1　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=(3x^2-x)^5$　　(2)　$y=(1-3x^2)^4$　　(3)　$y=\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

[解答]

(1)　$y'=5(3x^2-x)^4\cdot(3x^2-x)'=5(3x^2-x)^4(6x-1)$

(2)　$y'=4(1-3x^2)^3\cdot(1-3x^2)'=4(1-3x^2)^3(-6x)=-24x(1-3x^2)^3$

(3)　$y=(x^2+1)^{-2}$ より

$$y'=-2(x^2+1)^{-3}\cdot(x^2+1)'=-\frac{2}{(x^2+1)^3}\cdot 2x=-\frac{4x}{(x^2+1)^3}$$

(参考)商の微分の公式を用いると

$$y'=-\frac{\{(x^2+1)^2\}'}{\{(x^2+1)^2\}^2}=-\frac{2(x^2+1)\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^4}=-\frac{2\cdot 2x}{(x^2+1)^3}=-\frac{4x}{(x^2+1)^3}$$

第 8 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

$$y'=4(x^2-3x+4)^3\cdot(x^2-3x+4)' \quad \text{[A]}$$

$$=\boldsymbol{4(x^2-3x+4)^3\,(2x-3)}$$

[A]　$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$
ここでは，$f(u)=u^4$，$f'(u)=4u^3$
　$u=g(x)=x^2-3x+4$
　　$g'(x)=2x-3$
である。

2

[正解] イ：④

[解説]

$$y'=5(7-2x^3)^4\cdot(7-2x^3)' \quad \text{[B]}$$

$$=5(7-2x^3)^4\cdot(-6x^2)$$

$$=\boldsymbol{-30x^2\,(7-2x^3)^4}$$

[B]　$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$
ここでは，$f(u)=u^5$，$f'(u)=5u^4$
　$u=g(x)=7-2x^3$，$g'(x)=-6x^2$
である。

3

[正解] ウ：④

[解説]

$y=(x^2+4)^{-3}$ より，

$$y'=-3(x^2+4)^{-4}\cdot(x^2+4)' \quad \text{[C]}$$

$$=-\frac{3}{(x^2+4)^4}\cdot 2x$$

$$=\boldsymbol{-\frac{6x}{(x^2+4)^4}}$$

[C]　$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$
ここでは，$f(u)=u^{-3}$，$f'(u)=-3u^{-4}$
　$u=g(x)=x^2+4$，$g'(x)=2x$
である。